

제 2 교시

수리 영역(가형)

짜수형

5지선다형

1. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 의 역행렬 A^{-1} 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{5x}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1 ④ e ⑤ 5

3. 확률변수 X 가 이항분포 $B(200, p)$ 를 따르고 X 의 평균이 40일 때, X 의 분산은? [2점]

- ① 36 ② 35 ③ 34 ④ 33 ⑤ 32

4. 두 집합

$$A = \left\{ x \mid \frac{(x-2)^2}{x-4} \leq 0 \right\}, \quad B = \{ x \mid x^2 - 8x + a \leq 0 \}$$

에 대하여 $A \cup B = \{ x \mid x \leq 5 \}$ 일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 7 ② 10 ③ 12 ④ 15 ⑤ 16

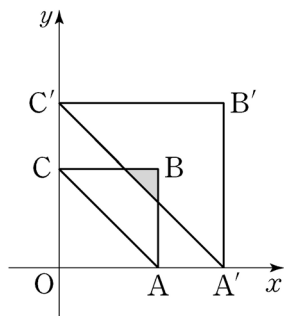
5. 흰색 깃발 5개, 파란색 깃발 5개를 일렬로 모두 나열할 때, 양 끝에 흰색 깃발이 놓이는 경우의 수는? (단, 같은 색 깃발끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

- ① 56 ② 63 ③ 70 ④ 77 ⑤ 84

6. 좌표평면에서 행렬 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ ($k > 1$)로 나타내어지는

일차변환에 의하여 세 점 $A(3, 0)$, $B(3, 3)$, $C(0, 3)$ 이 옮겨진 점을 각각 A' , B' , C' 이라 하자. 삼각형 ABC 의 내부와 삼각형 $A'B'C'$ 의 내부의 공통부분의 넓이가 $\frac{1}{2}$ 일 때, k 의 값은? [3점]

- ① $\frac{11}{6}$ ② $\frac{9}{5}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$



7. 누에나방 암컷은 페로몬을 분비하여 수컷을 유인한다.

누에나방 암컷이 페로몬을 분비한 후 t 초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 x 인 곳에서 측정한 페로몬의 농도 y 는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$\log y = A - \frac{1}{2} \log t - \frac{Kx^2}{t} \quad (\text{단, } A \text{와 } K \text{는 양의 상수이다.})$$

누에나방 암컷이 페로몬을 분비한 후 1초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 2인 곳에서 측정한 페로몬의 농도는 a 이고, 분비한 후 4초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 d 인

곳에서 측정한 페로몬의 농도는 $\frac{a}{2}$ 이다. d 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

8. 삼각형 ABC에서

$$\overline{AB} = 2, \quad \angle B = 90^\circ, \quad \angle C = 30^\circ$$

이다. 점 P가 $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ 를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{PA}|^2$ 의 값은?
[3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

9. 어느 회사에서 생산하는 음료수 1병에 들어 있는 칼슘 함유량은 모평균이 m , 모표준편차가 σ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 음료수 16병을 임의추출하여 칼슘 함유량을 측정한 결과 표본평균이 12.34이었다. 이 회사에서 생산한 음료수 1병에 들어 있는 칼슘 함유량의 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $11.36 \leq m \leq a$ 일 때, $a + \sigma$ 의 값은? (단, Z 가 표준정규분포를 따를 때 $P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.4750$ 이고, 칼슘 함유량의 단위는 mg이다.) [3점]

- ① 16.32 ② 15.82 ③ 15.32
④ 14.82 ⑤ 14.32

10. 좌표평면에서 원점을 중심으로 하는 회전변환 f 에 의하여

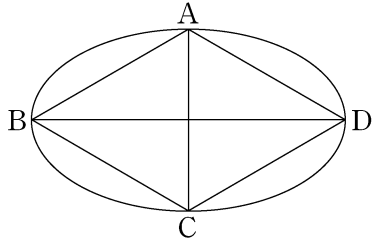
점 $(1, 0)$ 이 제1사분면 위의 점 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, a)$ 로 옮겨진다.

회전변환 f 를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합을 b 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? [3점]

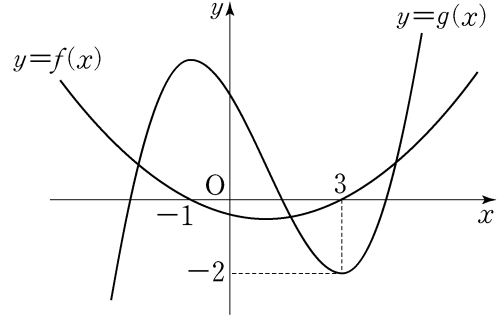
- ① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{37}{12}$ ③ $\frac{35}{12}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ $\frac{31}{12}$

11. 한 변의 길이가 10인 마름모 ABCD에 대하여
 대각선 BD를 장축으로 하고, 대각선 AC를 단축으로 하는
 타원의 두 초점 사이의 거리가 $10\sqrt{2}$ 이다. 마름모 ABCD의
 넓이는? [3점]

- ① $45\sqrt{2}$ ② $45\sqrt{3}$ ③ $50\sqrt{3}$
- ④ $65\sqrt{2}$ ⑤ $55\sqrt{3}$



12. 이차함수 $y=f(x)$ 와 삼차함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과
 같다.



$f(-1)=f(3)=0$ 이고, 함수 $g(x)$ 가 $x=3$ 에서 극솟값 -2 를
 가질 때, 방정식 $\frac{g(x)+2}{f(x)} - \frac{2}{g(x)} = 1$ 의 서로 다른 실근의
 개수는? [3점]

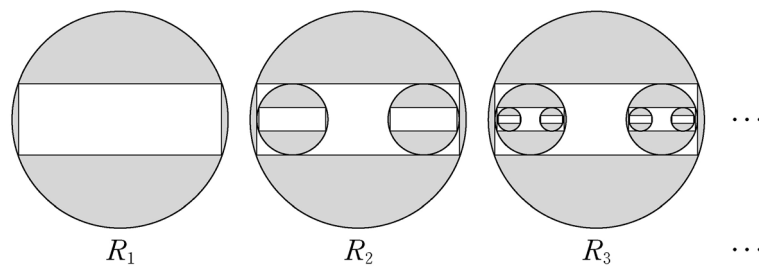
- ① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

13. 상자 A에는 빨간 공 3개와 검은 공 5개가 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 상자 A에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 빨간 공이 나오면 [실행 1]을, 빨간 공이 나오지 않으면 [실행 2]를 할 때, 상자 B에 있는 빨간 공의 개수가 1일 확률은? [3점]

[실행 1] 꺼낸 공을 상자 B에 넣는다.
 [실행 2] 꺼낸 공을 상자 B에 넣고, 상자 A에서 임의로 2개의 공을 더 꺼내어 상자 B에 넣는다.

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

14. 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 그림과 같이 가로와 세로의 길이의 비가 3:1인 직사각형을 이 원에 내접하도록 그리고, 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 직사각형의 세 변에 접하도록 원 2개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 그림 R_2 에서 새로 그려진 직사각형의 세 변에 접하도록 원 4개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{5}{4}\pi - \frac{5}{3}$ ② $\frac{5}{4}\pi - \frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}\pi - \frac{8}{5}$
 ④ $\frac{5}{4}\pi - 1$ ⑤ $\frac{4}{3}\pi - \frac{16}{15}$

15. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$A^2 + B = 3E, \quad A^4 + B^2 = 7E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

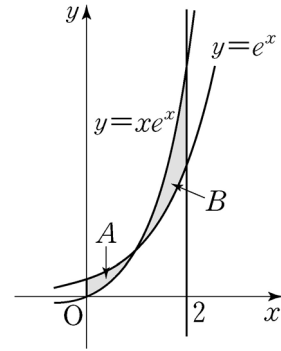
ㄱ. $AB = BA$

ㄴ. $B^{-1} = A^2$

ㄷ. $A^6 + B^3 = 18E$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 그림에서 두 곡선 $y=e^x, y=xe^x$ 과 y 축으로 둘러싸인 부분 A 의 넓이를 a , 두 곡선 $y=e^x, y=xe^x$ 과 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분 B 의 넓이를 b 라 할 때, $b-a$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{3}{2}$ ② $e-1$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ e

17. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때,

$$nS_{n+1} = (n+2)S_n + (n+1)^3 \quad (n \geq 1)$$

이 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

자연수 n 에 대하여 $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ 이므로

$$na_{n+1} = 2S_n + (n+1)^3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이다. 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$(n-1)a_n = 2S_{n-1} + n^3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이고, ㉠에서 ㉡을 뺀 식으로부터

$$na_{n+1} = (n+1)a_n + \boxed{\text{(가)}}$$

를 얻는다. 양변을 $n(n+1)$ 로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{\boxed{\text{(가)}}}{n(n+1)}$$

이다. $b_n = \frac{a_n}{n}$ 이라 하면,

$$b_{n+1} = b_n + 3 + \frac{\boxed{\text{(나)}}}{n(n+1)} \quad (n \geq 2)$$

이므로

$$b_n = b_2 + \frac{\boxed{\text{(다)}}}{n(n-1)} \quad (n \geq 3)$$

이다.

⋮

위의 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이라 할 때, $\frac{f(3)}{g(3)h(6)}$ 의 값은? [4점]

- ① 30 ② 36 ③ 42 ④ 48 ⑤ 54

18. 정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$ 인 함수 $f(x) = 2x \cos x$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f'(a) = 0$ 이면 $\tan a = \frac{1}{a}$ 이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극댓값을 가지는 a 가 구간 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ 에 있다.

ㄷ. 구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 에서 방정식 $f(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 실수 m 에 대하여 점 $(0, 2)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선이 곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ 과 만나는 점의 개수를 $f(m)$ 이라 하자. 함수 $f(m)$ 이 구간 $(-\infty, a)$ 에서 연속이 되게 하는 실수 a 의 최댓값은? [4점]

- ① -3 ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 6

20. 좌표평면에서 직선 $y = mx$ ($0 < m < \sqrt{3}$)가 x 축과 이루는 예각의 크기를 θ_1 , 직선 $y = mx$ 가 직선 $y = \sqrt{3}x$ 와 이루는 예각의 크기를 θ_2 라 하자. $3\sin\theta_1 + 4\sin\theta_2$ 의 값이 최대가 되도록 하는 m 의 값은? [4점]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{6}$

21. 좌표공간에서 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 삼각형 ABC의 넓이는 6이다.
 (나) 삼각형 ABC의 yz 평면 위로의 정사영의 넓이는 3이다.

삼각형 ABC의 평면 $x - 2y + 2z = 1$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은? [4점]

- ① $2\sqrt{6}+1$ ② $2\sqrt{2}+3$ ③ $3\sqrt{5}-1$
 ④ $2\sqrt{5}+1$ ⑤ $3\sqrt{6}-2$

단답형

22. 자연수 r 에 대하여 ${}_3H_r = {}_7C_2$ 일 때, ${}_5H_r$ 의 값을 구하시오. [3점]

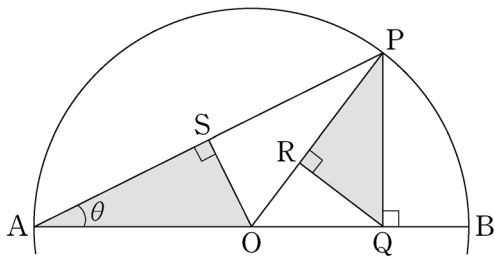
23. 방정식 $3\cos 2x + 17\cos x = 0$ 을 만족시키는 x 에 대하여 $\tan^2 x$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 좌표공간에 점 $A(9, 0, 5)$ 가 있고, xy 평면 위에 타원 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 이 있다. 타원 위의 점 P 에 대하여 \overline{AP} 의 최댓값을 구하시오. [3점]

25. 세 수 $a, a+b, 2a-b$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $1, a-1, 3b+1$ 은 이 순서대로 공비가 양수인 등비수열을 이룬다. $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 포물선 $y^2 = nx$ 의 초점과 포물선 위의 점 (n, n) 에서의 접선 사이의 거리를 d 라 하자. $d^2 \geq 40$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오. [4점]

27. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 R, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 S라 하자.
- $\angle PAQ = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)일 때, 삼각형 AOS의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRQ의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\theta^2 f(\theta)}{g(\theta)} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



28. 함수 $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$ 에 대하여 함수 $F(x)$ 를 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 라 하자. 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

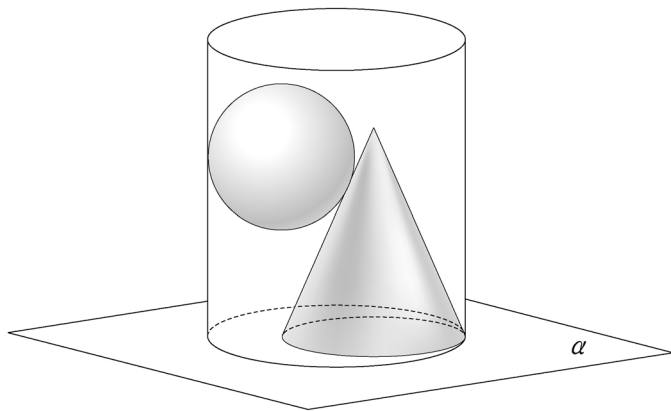
$$F(g(x)) = \frac{1}{2}F(x)$$

를 만족시킨다. $g'(2) = p$ 일 때, $30p$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 7인 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 12인 원뿔이 평면 α 위에 놓여 있고, 원뿔의 밑면의 둘레가 원기둥의 밑면의 둘레에 내접한다. 평면 α 와 만나는 원기둥의 밑면의 중심을 O, 원뿔의 꼭짓점을 A라 하자. 중심이 B이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 구 S는 원기둥과 원뿔에 모두 접한다.
- (나) 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영이 각각 A', B'일 때, $\angle A'OB' = 180^\circ$ 이다.

직선 AB와 평면 α 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan\theta = p$ 이다. $100p$ 의 값을 구하시오. (단, 원뿔의 밑면의 중심과 점 A'은 일치한다.) [4점]



30. 자연수 a, b 에 대하여 곡선 $y = a^{x+1}$ 과 곡선 $y = b^x$ 이 직선 $x = t (t \geq 1)$ 와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 다음 조건을 만족시키는 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오. 예를 들어, $a = 4, b = 5$ 는 다음 조건을 만족시킨다. [4점]

- (가) $2 \leq a \leq 10, 2 \leq b \leq 10$
- (나) $t \geq 1$ 인 어떤 실수 t 에 대하여 $\overline{PQ} \leq 10$ 이다.

* 확인 사항
 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.